S E S 2 0 1 0
Sixth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
2–4 November 2010, Sofia, Bulgaria

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА НА ЕКВИВАЛЕНТНОТО ВИХРОВО ПОКРИТИЕ С ПОСТОЯННА ИНТЕНЗИВНОСТ ЗА АЕРОДИНАМИЧЕН АНАЛИЗ НА ОБТИЧАНЕТО НА КРИЛЕН ПРОФИЛ

Константин Методиев

Институт за космически и слънчево-земни изследвания – Българска академия на науките
e-mail: komet@space.bas.bg

Ключови думи: *Теоретична аеродинамика, Панелен метод, Гранични интегрални уравнения*

Резюме: *В настоящия доклад е приложен метода на еквивалентното вихрово покритие за аеродинамичен анализ на обтичането на крилен профил. Същността на метода е замяната контура на профила с дискретни вихри с постоянна инетнзивност по панели. Този подход е резонен, тъй като специфичната проява на крилния профил е създаването на подемна сила, обичайно насочена от лицевата към тилната му страна чрез прекъсване в големината на скоростта. Вихровият слой притежава това свойство, което дава основание реалната непроницаема стена на профила да се замени чрез еквивалентен по въздействие върху течението вихров слой.*

Целта на доклада е да се представи числена реализация на споменатия панелен метод чрез програмен продукт Wolfram Mathematica©, с помощта на който обемът на изчислителната програма е намален значително.

APPLYING THE CONSTANT STRENGTH EQUIVALENT VORTEX METHOD FOR AERODYNAMIC ANALYSIS OF THE FLOW AROUND A WINGFOIL

Konstantin Metodiev

Space and Solar-Terrestrial Research Institute – Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: komet@space.bas.bg

1. Въведение

Една от основните задачи на аеродинамичното пресмятане се явява създаването на високоефективни крилни профили, притежаващи оптимални аеродинамични характеристики. Решението на тази задача е невъзможно без теоретично и експериментално изследване обтичането на профила. В частност за обезпечаване на добрите му показатели е необходимо да се изучат загубите от триене и налягане (профилни съпротивления), които загуби са тясно свързани с разпределението на скоростта и налягането по неговия контур.

В продължителен период от време проектирането на крилни профили се е основавало на натрупания от преди опит – теорията на подобието е създала възможност за това. Напредъкът, който се достигна през последните 30 – 35 години, не толкова в областта на теорията, колкото в областта на изчислителната техника, даде съществено отражение върху съвременните инженерни методи. Тяхното приложение доведе до забележимо подобрение на някои от характеристиките на профила – преди всичко на създавания коефициент на подемна сила.

Възникването на подемна сила по профила показва, че, средно взето, наляганията по гърба са по-малки от тези по корема. Обратното е вярно за скоростта, т.е. профилът предизвиква прекъсване в нейната големина. Лесно се забелязва, че подобно свойство проявява един разположен в течението покрит с вихри слой. Степента на насищане на дъгата – носител на слоя е уместно да се определи чрез т. нар. напрежение на слоя γ, като $\gamma = d\Gamma/ds$. Ако течението представлява сума от равномерно течение със скорост W_∞ и индуцирано такова от вихровия слой, то циркулацията по него ще бъде $\Gamma = (w_{корем} - w_{гръб})\Delta s$. От друга страна, по теоремата на Стокс $\Gamma = \gamma\Delta s$ и приравняването на двата израза за Γ дава едни от основните за доклада зависимости $\gamma = w_{корем} - w_{гръб}$, $w_{корем} = w_{ср} + 0.5\gamma$, $w_{гръб} = w_{ср} - 0.5\gamma$, $w_{ср} = 0.5(w_{корем} + w_{гръб})$. Оказва се, че вихровият слой притежава онова свойство, което по-горе бе изтъкнато като присъщо на крилния профил – да създава прекъсване в големината на скоростта. Това дава основание за въвеждане на т. нар. вихров модел на профила.

Относно γ може да се каже значително повече. Двама учени – Прагер и Мелников, са забелязали един съществен факт, който предава ново физическо тълкуване на γ. Той е формулиран като теорема, с която се утвърждава, че по обтечения контур |c(s)| = |γ(s)|. Моделът на профила, т. е. вихровият модел, е въобще проницаем за флуида и затова течението може да се развива както вън, така и във вътрешността на профила. Познатото свойство на γ, а именно $\gamma = w_{out} - w_{in}$ (w_{out} – скоростта вън, а w_{in} – скоростта вътре в контура), е, разбира се, налице. Оказва се обаче, че $w_{in} = 0$. Действително, ако това не е така, поради условието, че профилът е токова линия и флуид не може да премине през нея, токовите линии в контура би трябвало да са затворени криви. Флуидните частици биха се движили по тях с насочени по направлението на обхождане скорости и циркулацията по тези криви би била различна от нула. По теоремата на Стокс това би означавало, че в контура се съдържат вихри, каквито в модела отсъстват. Остава да се заключи, че $w_{in} = 0$, откъдето следва, че $|\gamma(s)| = |w_{out}(s)|$, т. е. интензивността на слоя в произволна точка от профила е равна на големината на скоростта.

2. Теоретична постановка

В доклада е изведен потенциала на скоростта така, както е заимстван от литературата. Чрез диференциране на потенциала с опертор “grad”, известно е, че се получават скоростните компоненти на полето на скоростта. Акцентът в доклада не е извеждането на вече известни фундаметални формулировки, а приложението на така получения математически апарат.

Разглежда се следния интеграл с подинтегрална функция с особеност в трансцедентна форма [Katz, Plotkin]

(1) $$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} Arctg \frac{\eta}{\xi - \xi_0} d\xi_0$$

която се решава чрез полагането $\Xi = \eta/(\xi - \xi_0)$. Тогава, при смяната на променливите, се получава, че $d\xi_0 = \eta \Xi^{-2} d\Xi$ и интегралът се преобразува така

(2) $$I = \eta \int_{\eta/(\xi-\xi_l)}^{\eta/(\xi-\xi_r)} \Xi^{-2} Arctg \Xi d\Xi$$

Използвайки готовите резултати от [Brandao] решението на интеграла е

(3) $$I = -\eta \left(\Xi^{-1} Arctg \Xi + 0.5 \ln \frac{1+\Xi^2}{\Xi^2} \right) \Bigg|_{\eta/(\xi-\xi_l)}^{\eta/(\xi-\xi_r)}$$

което след алгебрични преобразувания приема вида

(4) $$I = (\xi - \xi_l) Arctg \frac{\eta}{\xi - \xi_l} - (\xi - \xi_r) Arctg \frac{\eta}{\xi - \xi_r} + \frac{\eta}{2} \ln \frac{(\xi - \xi_l)^2 + \eta^2}{(\xi - \xi_r)^2 + \eta^2}$$

Обратната функция Arctg(x/y) отчита квадранта, в който се намира точката с координати (x, y). Потенциалът на скоростта тогава е

(5) $$\Phi(\xi, \eta) = -\frac{\gamma}{2\pi} I$$

или в полярни координати

(6)
$$\Phi(\rho,\theta) = -\frac{\gamma}{2\pi}\left[(\xi-\xi_l)\theta_l - (\xi-\xi_r)\theta_r + 0.5\eta\ln\frac{\rho_l^2}{\rho_r^2}\right]$$
$$\rho_{l,r} = \sqrt{(\xi-\xi_{l,r})^2 + \eta^2}, \quad \theta_l = Arctg\frac{\eta}{\xi-\xi_l}, \quad \theta_r = Arctg\frac{\eta}{\xi-\xi_r}$$

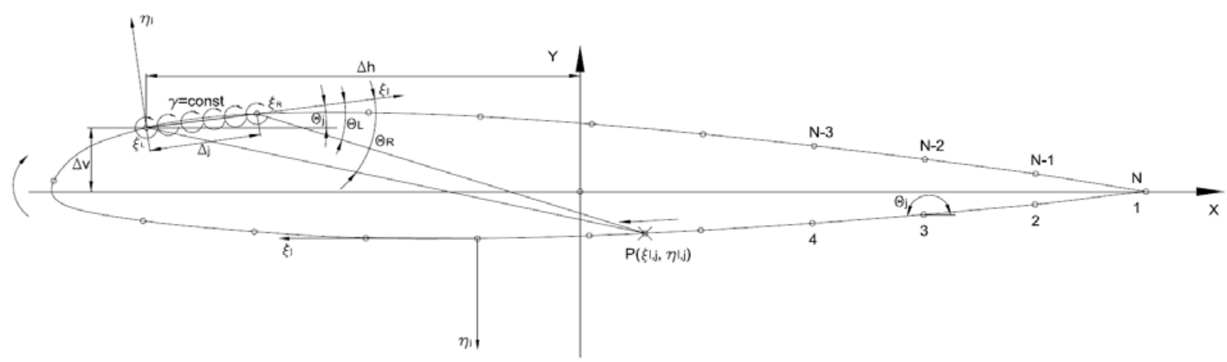
Компонентите на градиента тогава са следните

(7)
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \dot{\xi}(\xi,\eta) = -\frac{\gamma}{2\pi}\left(Arctg\frac{\eta}{\xi-\xi_l} - Arctg\frac{\eta}{\xi-\xi_r}\right)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \dot{\eta}(\xi,\eta) = -\frac{\gamma}{4\pi}\ln\frac{\eta^2+(\xi-\xi_l)^2}{\eta^2+(\xi-\xi_r)^2}$$

Последните формули определят потенциално скоростно поле в правоъгълна координатна система на панела (ξ, η). Частният случай е $\theta_l = 0 \cup \theta_r = \pi$, което се получава при η = 0. Практика е панелът да се доближава „отгоре” или „отдолу”, като за целта ординатата приема стойност съответно η ±= ε, където ε е число с няколко порядъка по-малко. Тогава

(8)
$$\dot{\xi}(\xi,0\pm) = \pm\frac{\gamma}{2}$$
$$\dot{\eta}(\xi,0\pm) = \frac{\gamma}{4\pi}\ln\frac{(\xi-\xi_l)^2}{(\xi-\xi_r)^2}$$

В случая когато $\xi = 0.5 * (\xi_l + \xi_r)$ и вертикалната компонента на скоростта ∂Φ/∂η = 0 се наблюдава т. нар. ефект на самоиндукция.



Фиг. 1. Схема на числената реализация, профил NACA23012

В последователността на решение на поставената задача се стига до решаване на нехомогенна система от алгебрични уравнения. Крилният профил се дискретизира с панели, като точките се сгъстяват в носа и изходящия ръб по косинусов закон. Съгласно фиг. 1, в точката на наблюдение P_i се индуцира скорост от вихровия слой в панел j. За същата точка се изчислява индуцираната скорост от всеки един панел по отделно, като по подобен начин се изследват и останалите точки. По този начин профилът се обхожда например по посока на циркулацията на скоростта. За пресмятане на скоростите се използват формули (7), като изчисленията се извършват в локална координатна система (ξ, η). Следователно, необходима е предварителна трансформация на координатите на точка P_i. Положението на точката върху панела е избрано в средата. След определяне на индуцираните скорости от панел j в точка P_i, същите се трансформират обратно в глобалната координатна система (X, Y). Трансформационните матрици имат вида:

(9) $$T_j = \begin{Vmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{Vmatrix} om(X,Y)към(\xi,\eta); T_j^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{Vmatrix} om(\xi,\eta)към(X,Y)$$

където ъгъл θ_j е сключен между текущия панел j и абсцисата X така, както е показано на фиг. 1. При съставянето на матричното уравнение се взима в предвид, че компонентата на скоростта по нормалния към панела вектор трябва да е нула. Скоростният вектор в панел i е сума от индуцираните компоненти от отделните панели j и скоростта на несмутеното течение, т.е.

(10) $$\vec{W}_i = \sum_{j=1}^{points-1} \left(T_j^{-1} \begin{Vmatrix} \dot{\xi}_j \\ \dot{\eta}_j \end{Vmatrix} + \vec{V}_\infty \right)^T . \begin{Vmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \end{Vmatrix}$$

Матричното уравнение тогава изглежда така:

(11) $$\|A_{i,j}\| . \vec{\gamma} = -\vec{V}_\infty . \vec{n}_i$$

където

(12) $$a_{i,j} = \left(T_j^{-1} \begin{Vmatrix} \dot{\xi}_j \\ \dot{\eta}_j \end{Vmatrix} \right)^T . \begin{Vmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \end{Vmatrix}$$

В допълнение се задава и условието на Кута – Жуковски за равенство на скоростите в изходящия ръб:

(13) $$\gamma_1 + \gamma_N = 0$$

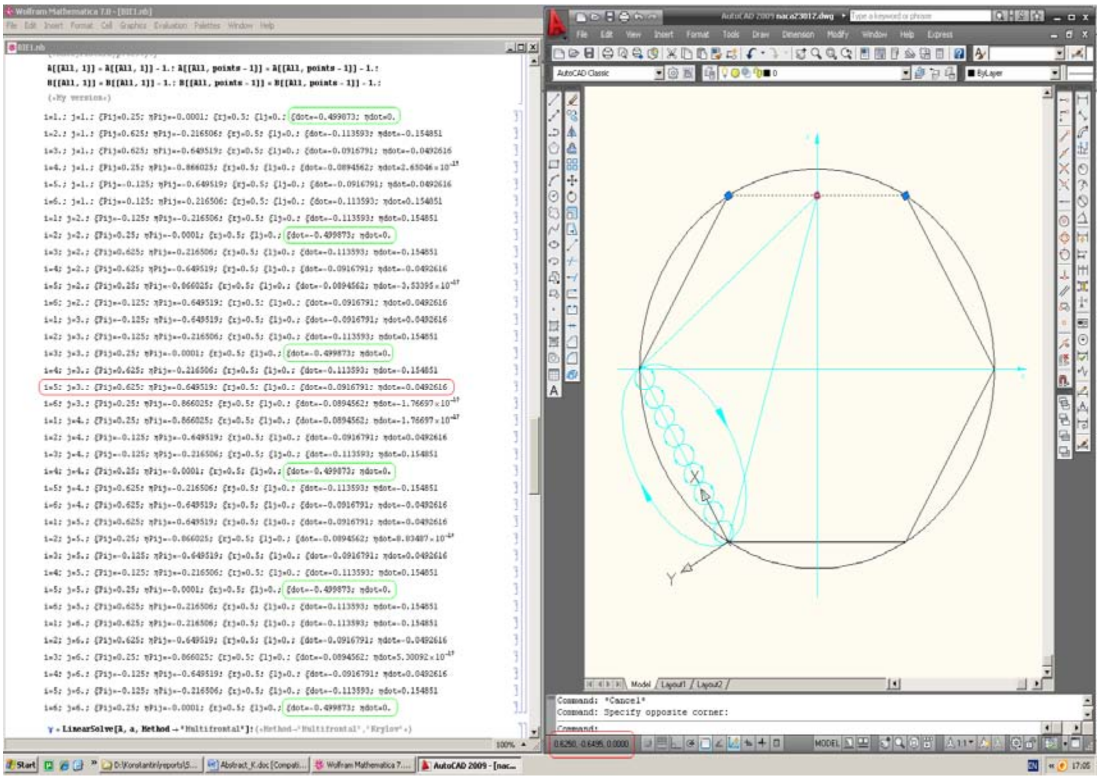
Получената тогава система е от N+1 уравнения относно N неизвестни. За определяне на системата са възможни два подхода. Катц и Плоткин [Katz, Plotkin] заместват едно от уравненията на система (11) с уравнение (13). Това обаче води до осцилация на численото решение в точката на колокация, съответстваща на въпросното уравнение. Друг подход за получаване на определена еквивалентна система е уравнение (13) да се извади почленно от всички уравнения на система (11). Този подход е използван в доклада.

След определяне на неизвестния вектор γ, се изчислява разпределението на коефициента на статично налягане по долната и горна повърхност на профила. Използвана е формулата:

(14) $$c_p = 1 - \left[\frac{V_\infty \cos(\alpha + \theta_i) + 0.5\gamma_i}{V_\infty} \right]^2$$

3. Резултати

За установяване адекватността на алгоритъма се използва шестоъгълник, по панелите на който се проверяват ориентацията на нормалния към панела вектор, изпълнението на условия (8) и координатите на точката на колокация в двете координатни системи. На фиг. 2 се вижда сверяване на резултатите за този изчислителен случай с използването на програмните пакети Wolfram Mathematica и AutoCAD. Показаният на чертежа тестов случай е i = 5 и j = 3, като координатната система е ориентирана по панела. Вижда се в средите на двата продукта, че координатите на точката на колокация в цитираната локална координатна система съвпадат. При равенство на индексите i = j също е изпълнено условие (8): ∂Φ/∂ξ = -0.5 и ∂Φ/∂η = 0. Знакът пред скоростната компонента ∂Φ/∂ξ е отрицателен, защото локалната ордината е η = 0 - ε.

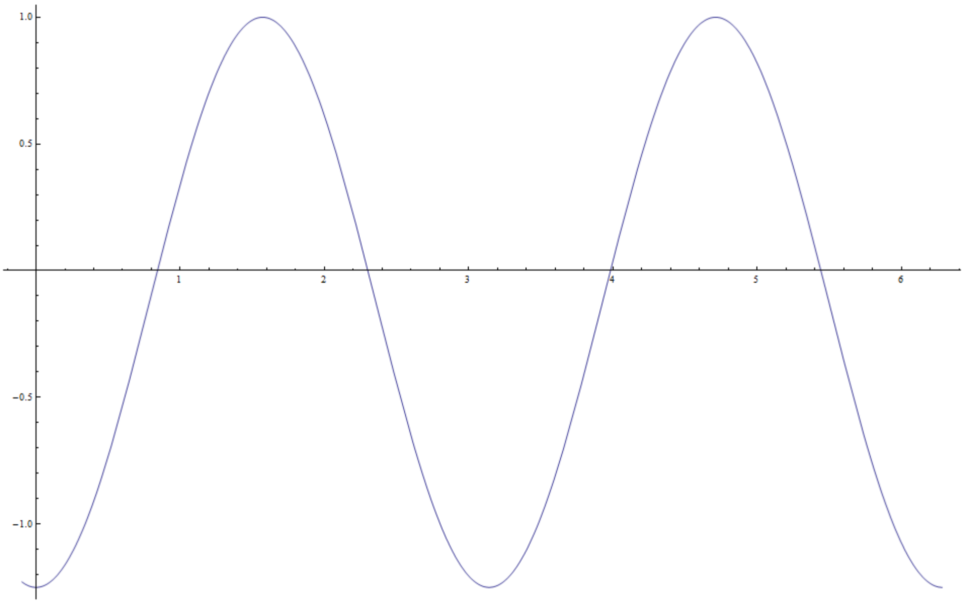


Фиг. 2. Тест на числената реализация с шестоъгълник

Следващият тест за проверка адекватността на алгоритъма е сравняване на резултатите с теоретичните за случай на обтичане на сфера. Известно е, че за случай на обтичане с потенциален поток, коефициентът на статично налягане се пресмята по формулата:

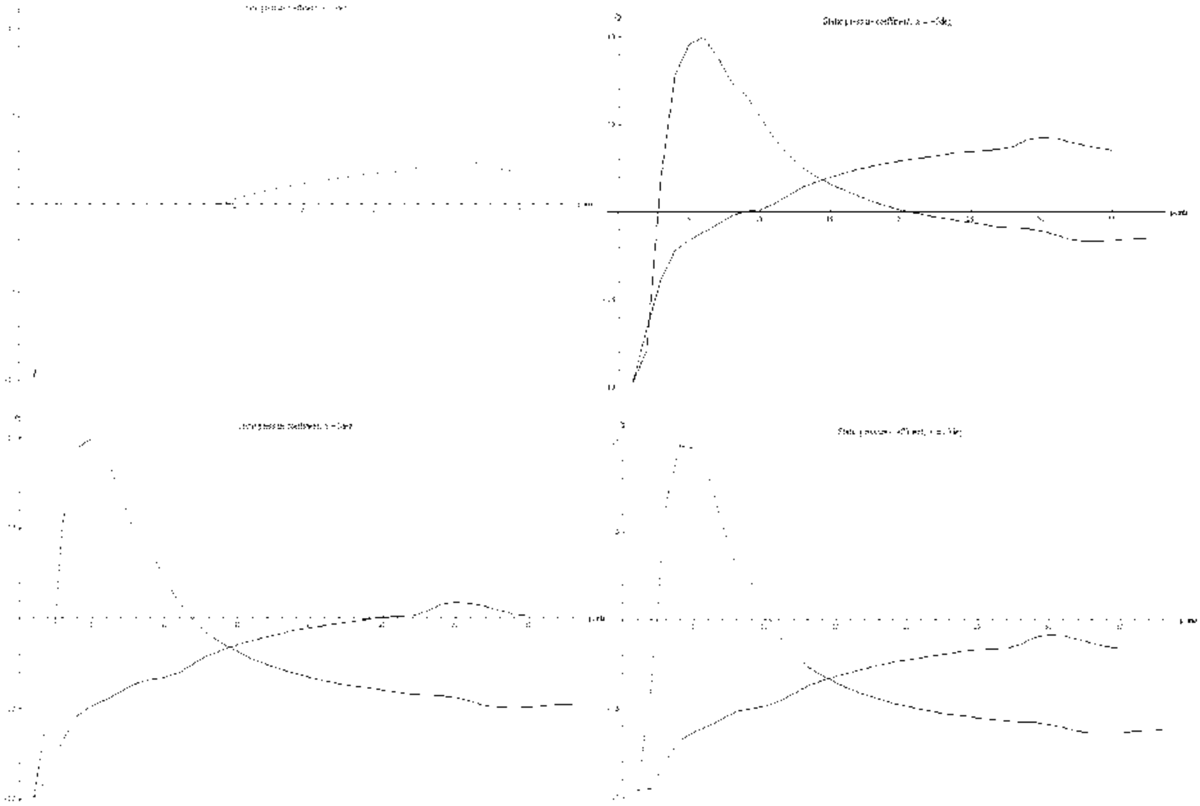
(15) $$c_p = 1 - \frac{9}{4}\cos^2\theta, \theta \in [0; 2\pi]$$

Резултатите от формула (15) и числената реализация (до формула (14) включително) са показани на фиг. 3. Съвпадението е пълно.

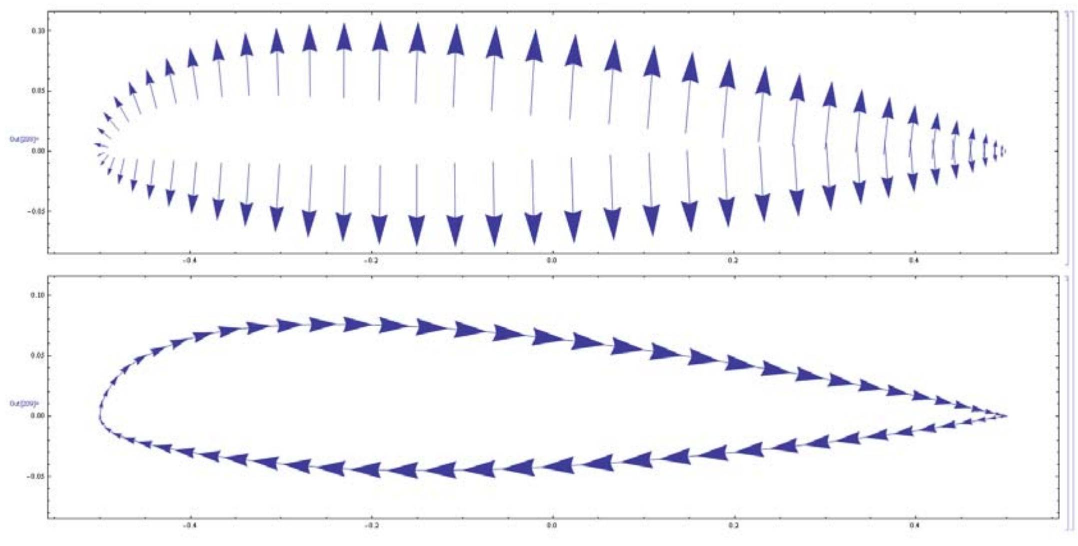


Фиг. 3. Тест на числената реализация за случай на обтичане на сфера с потенциален поток

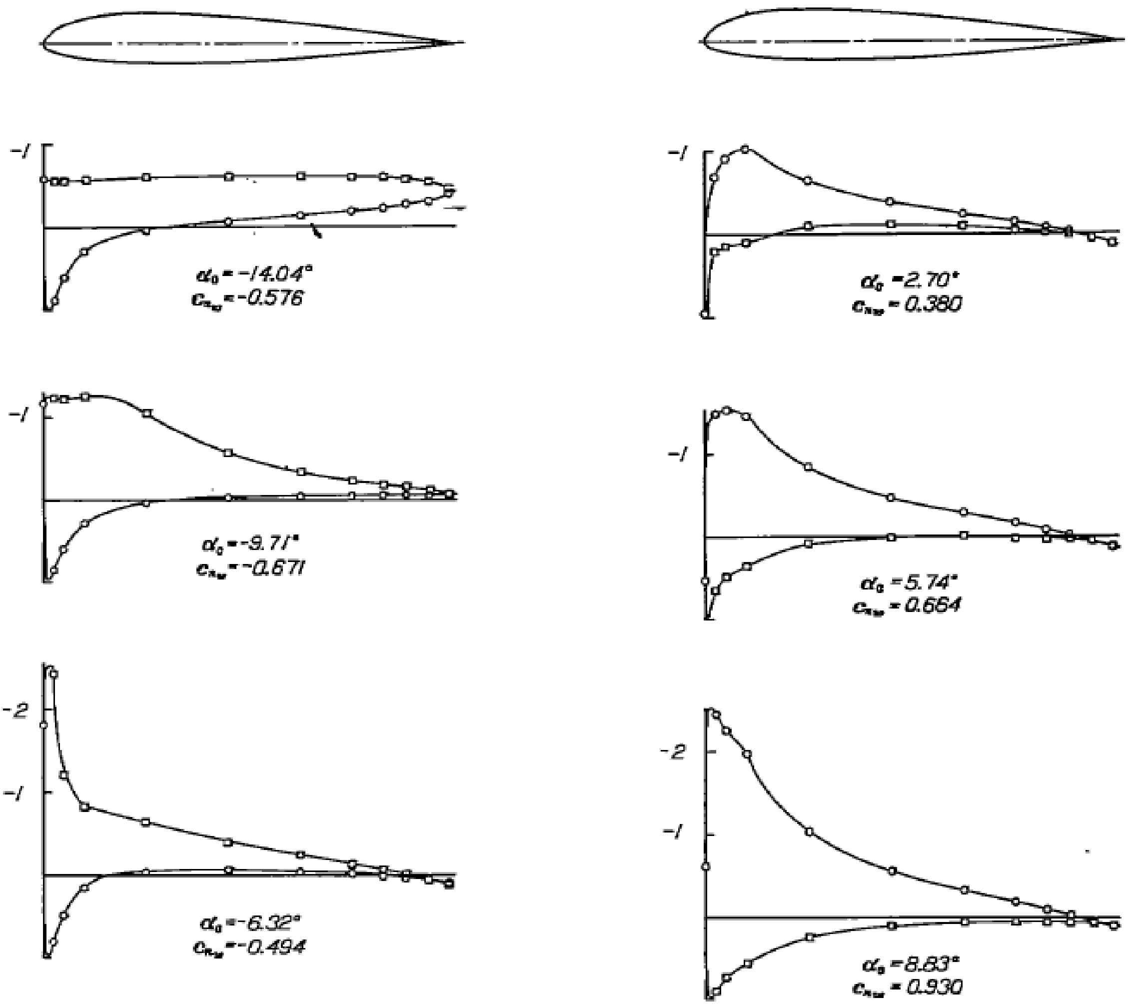
При положение, че резултатите от тестовете с точни решения са положителни, пристъпено бе към анализ обтичането на крилен профил с потенциален поток. Използван бе крилен профил NACA23012, дискретизиран с помощта на 72 панела. Нормалните и тангенциални вектори към панелите са показани на фиг. 5, а резултатите за разпределението на коефициента на статично налягане – на фиг. 4.



Фиг. 4. Разпределение на коефициента на статично налягане,
крилен профил NACA23012, α = -5º, 0º, 5º, 10º



Фиг. 5. Нормални и тангенциални <u>единични</u> вектори към панелите на профил NACA23012



Фиг. 6. Експериментални продувки на профил NACA23012, Re = 2.04E6

На фиг. 6 са показани резултати от експериментални продувки на профила, проведени от [Wenzinger]. Несъвпадението на резултатите в зоната около задна точка на заприщване се обяснява с налагането на условието на Кута – Жуковски. Така за настоящата задача последните два панела около изходящия ръб стават неносещи. Решение на проблема е разпределението на еквивалентното вихрово покритие да се търси като линейна функция.

4. Заключение

В настоящия доклад бе разгледан алгоритъм за анализ обтичането с потенциален поток на крилен профил. Използваният панелен метод допуска постоянна интензивност на присъединеното вихрово покритие към панела. Алгоритъмът бе тестван с точни решения, фундаментални в теоретичната аеродинамика.

Разгледаният метод е представен във възможно най-простата си форма на реализация. По-точни решения могат да се търсят ако разпределението на вихровото покритие е линейно и дори квадратна функция. Панелите също могат да се изразят с рационален полином от по-висока степен, например коефициентите на полинома могат да се получат с построяване на кубичен сплайн. Интегрирането на присъединеното вихрово покритие в този случай обаче е свързано със значителни трудности: интегралът е линеен и свеждането му към Риманов се извършва чрез специални квадратури.

5. Благодарности

С настоящото изследване авторът би желал читателят да си спомни за проф. д.т.н. инж. Кирил Варсамов, преподавател в катедра „Хидроаеродинамика" към Технически университет – София. Под неговото компетентно ръководство, педагогически такт и търпение бе реализиран този алгоритъм като дипломна работа на автора. От преждевременната кончина на проф. Варсамов изминаха 10 години.

Изследването е извършено по линия на Договор за безвъзмездна финансова помощ по ОП „РЧР", схема № BG051PO001/07/3.3-02/63/17.06.08г. „Подкрепа за развитието на докторанти, постдокторанти, специализанти и млади учени".

Литература:

[B r a n d a o] B r a n d a o, M. P. Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics: The Problem Revisited, AIAA Journal, vol. 25, no. 9, pp. 1258 – 1260, 1987

[K a t z, P l o t k i n] K a t z, J., A. P l o t k i n. Low – Speed Aerodynamics, From Wing Theory to Panel Methods, McGraw – Hill, Inc., 1991

[W e n z i n g e r] W e n z i n g e r, C. J. Pressure distribution over an NACA 23012 Airfoil with an NACA 23012 External - Airfoil Flap, NACA Report No. 614, 1938